

4.6. PRZEPŁYWY EKSTREMALNE

Niezbędnym elementem planowania przedsięwzięć w zakresie budownictwa wodnego, wodno-melioracyjnego i gospodarki wodnej jest znajomość przepływów maksymalnych i minimalnych, jakie mogą wystąpić w przyszłości. O wielkości tych zjawisk wnioskuje się na podstawie danych obserwacyjnych.

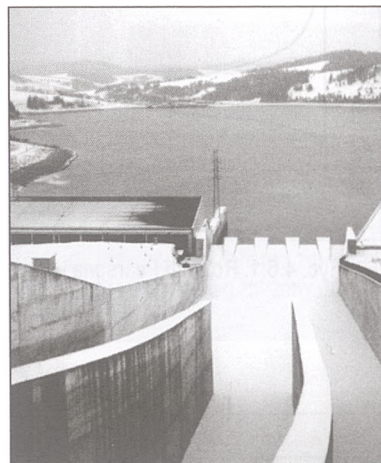
Przepływy maksymalne są szczególnie ważne w budownictwie hydrotechnicznym oraz gospodarce wodnej. Są one najczęściej stosowanymi elementami hydrologicznymi przy projektowaniu budowli wodnych; stanowią m.in. podstawę określenia wymiarów budowli (np. spusty, przelewy). Znajomość **przepływów minimalnych** jest ważna dla określania zasobów wodnych i możliwości ich wykorzystania. Jest to szczególnie znaczące w czasach, kiedy coraz częściej występują niedobory wody, przy jednoczesnym wzroście zapotrzebowania na nią.

W wielu przypadkach dysponuje się zbyt krótkimi ciągami obserwacyjnymi, co uniemożliwia bezpośrednie obliczenie natężenia przepływów maksymalnych lub minimalnych o niewielkim prawdopodobieństwie przekroczenia. Można jednak wykorzystać dostępne wyniki obserwacji i założyć, iż podlegają one określonej rozkładowi prawdopodobieństwa. Zakłada się, iż prawdopodobna częstotliwość zjawisk przyszłych jest równa częstotliwości zjawisk, jaka miała miejsce w przeszłości. Parametry rozkładu szacuje się na podstawie próby losowej. Do głównych metod szacowania **parametrów rozkładu prawdopodobieństwa** przepływów ekstremalnych należą: metoda momentów, metoda kwantyli oraz metoda największej wiarygodności.

Metoda momentów opiera się na tzw. momentach rozkładu zmiennej losowej. Najczęściej wykorzystywane są moment początkowy i moment centralny, obliczane na podstawie próby losowej. Przyjmuje się je jako oceny momentów rozkładu prawdopodobieństwa.

Metoda kwantyli polega na określeniu wybranych wartości zmiennej o określonym prawdopodobieństwie przewyższenia, zwanych kwantylami. Wyznacza się zazwyczaj niektóre wartości kwantyli: jeden, odpowiadający środkowi ciągu, i dwa – jednakowo odległe od środka ciągu. Podobnie jak w metodzie momentów, mając określone wartości kwantyli, można wyznaczyć parametry rozkładu.

W metodzie największej wiarygodności podstawowym pojęciem jest funkcja wiarygodności (funkcja parametrów rozkładu), którą można w przybliżeniu interpretować jako proporcjonalną do prawdopodobieństwa zaobserwowania zbioru elementów próby losowej. Zmierza się zatem do znalezienia takiego układu wartości parametrów, przy którym wiarygodność (prawdopodobieństwo wystąpienia) zaobserwowania danej próby losowej jest największa.

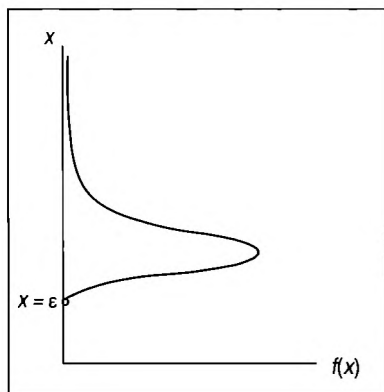


Znajomość natężenia przepływów maksymalnych jest szczególnie ważna przy projektowaniu budowli wodnych (zaporą na Dunajcu, Czorsztyn)

przepływ miarodajny – przepływ maksymalny roczny o niewielkim prawdopodobieństwie przekroczenia, który uwzględnia się przy projektowaniu wymiarów przejść mostowych, przelewów lub innych obiektów hydrotechnicznych

rozkład prawdopodobieństwa – rozkład określający zależność między wielkością zdarzenia a jego prawdopodobieństwem

4.6.1. Przepływy maksymalne o określonym prawdopodobieństwie przewyższenia



Ryc. 4.6.1. Rozkład Pearsona III typu

W celu obliczenia maksymalnych przepływów rocznych o określonym prawdopodobieństwie przewyższenia, można stosować metodę opierającą się na założeniu, że maksymalne roczne przepływy podlegają **rozkładowi Pearsona III typu**, zaś parametry rozkładu szacuje się metodą kwantyli. Autorem rozkładu jest angielski statystyk K. Pearson, który na początku XX w. opracował 12 typów rozkładów gęstości prawdopodobieństwa zmiennych losowych ciągłych odnoszących się do zjawisk przyrodniczych. Największe zastosowanie przy opisie ciągów ekstremalnych zjawisk hydrologicznych znalazł typ III. Krzywa Pearsona III typu ma m.in. następujące cechy (ryc. 4.6.1):

- jest asymetryczna względem prostej przechodzącej przez punkt odpowiadający wartości modalnej, przy czym asymetria krzywej ma znak dodatni,
- jest u dołu ograniczona w punkcie $x = \epsilon$,
- w górnej części krzywa zbliża się asymptotycznie do osi pionowej, gdy x rośnie nieograniczenie,
- ma jedno maksimum w punkcie równym wartości modalnej.

Podstawą obliczeń są ciągi, utworzone z wartości przepływów maksymalnych, zaobserwowanych w poszczególnych latach. Materiał obserwacyjny powinien być dokładnie zweryfikowany i powinien uwzględniać obserwacje nadzwyczajne. Zaleca się następujące minimalne długości ciągów dla uzyskania poprawnych wyników:

- 15 lat – dla wyznaczenia przepływu $Q_{>2\%}$ o prawdopodobieństwie pojawienia się $p > 2\%$,
- 25 lat – dla wyznaczenia przepływu $Q_{1 \leq p \leq 2\%}$ o prawdopodobieństwie pojawienia się $1 \leq p \leq 2\%$,
- 40 lat – dla wyznaczenia przepływu $Q_{<1\%}$ o prawdopodobieństwie pojawienia się $p < 1\%$.

W przypadku braku dostatecznej liczby danych, ciąg można uzupełnić np. za pomocą związków korelacyjnych pomiędzy przekrojami hydrometrycznymi (patrz rozdz. 2.3), tak jednak, by liczba ustalonych w ten sposób danych nie przekraczała 30% ogólnej liczebności serii.

Ciąg obserwacyjny porządkuje się od wartości największych do najmniejszych (ciąg malejący), a następnie nanosi na układ współrzędnych prostokątnych, w celu uzyskania krzywej prawdopodobieństwa. Na osi rzędnych nanosi się przepływy maksymalne roczne Q_{max} , zaś na osi odciętych – sumowane wartości prawdopodobieństwa empirycznego p pojawiania się poszczególnych przepływów Q_{max} wraz z wyższymi, wyrażone w procentach. Wartości p określa się według wzoru:



Natężenie przepływu maksymalnego jest możliwe do oszacowania za pomocą metod statystycznych

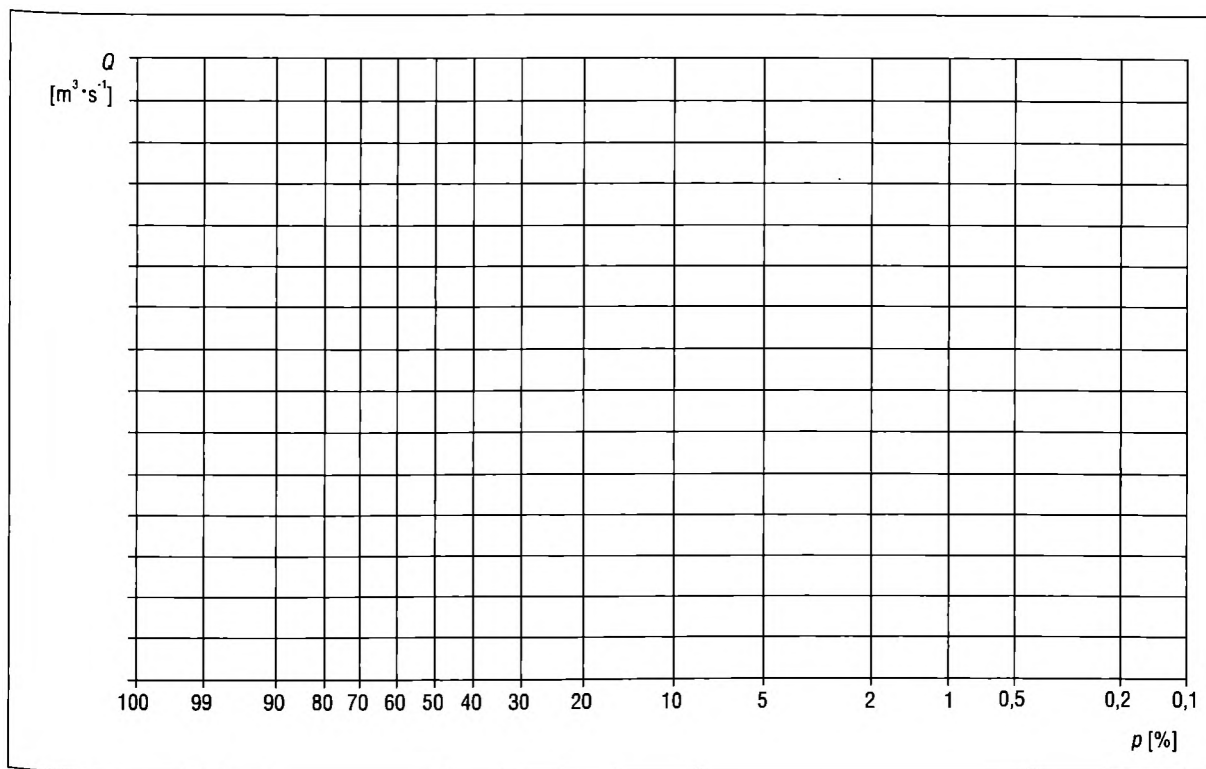
$$p = \frac{m}{N+1} \cdot 100 \quad (4.6.1)$$

gdzie:

- p – prawdopodobieństwo osiągnięcia i przekroczenia wartości m -tego wyrazu w N -elementowym ciągu [%],
- m – miejsce danego wyrazu w ciągu,
- N – liczebność ciągu.

Wykresy sumowanych częstości wraz z wyższymi są zazwyczaj krzywymi nieregularnymi, z szeregiem załomów i przegięć. Rysując **krzywą prawdopodobieństwa empirycznego**, dąży się do ich odrębnego wyrównania. W celu ułatwienia korzystania z wykresów, na osi poziomej – zamiast zwykłej podziałki arytmetycznej – wykorzystuje się specjalną podziałkę funkcyjną, odpowiadającą przyjętemu typowi równania krzywej rozkładu. W przypadku przepływów maksymalnych rocznych, stosuje się podziałkę prawdopodobieństwa dla rozkładu Pearsona III typu, co umożliwia dokładne określenie wartości zmiennej o małym prawdopodobieństwie przewyższenia (ryc. 4.6.2). Z krzywej prawdopodobieństwa empirycznego odczytuje się wartości decyli Q_{10} , Q_{50} , Q_{90} i Q_{100} , które służą do wyznaczenia parametrów rozkładu prawdopodobieństwa, takich jak:

podziałka prawdopodobieństwa – podziałka graficzna, na której wykres rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej tworzy przebieg zbliżony do linii prostej



Ryc. 4.6.2. Podziałka prawdopodobieństwa dla rozkładu Pearsona III typu

Tab. 4.6.1. Wartości współczynnika asymetrii s (Kaczmarek, 1970)

$\frac{v}{Q_{50} - Q_{100}}$	s	$\frac{v}{Q_{50} - Q_{100}}$	s	$\frac{v}{Q_{50} - Q_{100}}$	s
0,0	0,00	1,4	0,84	5,0	1,60
0,1	0,07	1,6	0,93	6,0	1,67
0,2	0,13	1,8	1,02	7,0	1,72
0,3	0,20	2,0	1,09	8,0	1,75
0,4	0,26	2,2	1,15	10,0	1,80
0,5	0,33	2,4	1,21	15,0	1,87
0,6	0,39	2,6	1,26	20,0	1,90
0,7	0,45	2,8	1,31	30,0	1,93
0,8	0,51	3,0	1,35	40,0	1,95
0,9	0,57	3,5	1,44	50,0	1,96
1,0	0,63	4,0	1,50	100,0	1,98
1,2	0,74	4,5	1,55	∞	2,00

współczynnik zmienności oraz współczynnik asymetrii. **Współczynnik zmienności** c_v oblicza się według wzoru:

$$c_v = \frac{Q_{10} - Q_{90}}{2Q_{50}} \quad (4.6.2)$$

gdzie:

Q_{10} , Q_{50} , Q_{90} – wartości przepływów maksymalnych rocznych o prawdopodobieństwie przewyższenia 10%, 50%, 90%.

Współczynnik asymetrii s wyznacza się z tab. 4.6.1 w zależności

od wielkości ilorazu $\frac{v}{Q_{50} - Q_{100}}$, gdzie $v = \frac{Q_{10} - Q_{90}}{2}$,

gdzie:

Q_{100} – wartość decyla odczytywana z krzywej prawdopodobieństwa empirycznego.

Wartości przepływów maksymalnych koniecznych do wykreślenia teoretycznej krzywej prawdopodobieństwa oblicza się według wzoru:

$$Q_p = Q_{50} \left(1 + c_v \varphi(p, s) \right) \quad (4.6.3)$$

gdzie:

Q_p – wartość przepływu maksymalnego rocznego o określonym prawdopodobieństwie przewyższenia p ,

$\varphi(p, s)$ – funkcja zależna od współczynnika asymetrii s i prawdopodobieństwa p (tab. 4.6.2).

Aby wykreślić **teoretyczną krzywą prawdopodobieństwa**, należy obliczyć przepływy maksymalne dla wybranych wartości prawdopodobieństw przewyższenia (np. 0,1; 0,2; 0,5; 1; 2; 3; 5; 10; 20; 30; 50; 80; 90; 95; 99; 100). Na tej podstawie wykreśla się teore-

teoria estymacji – dział statystyki zajmujący się szacowaniem parametrów rozkładu prawdopodobieństwa na podstawie próby losowej

Tab. 4.6.2. Wartości funkcji $\Phi(p,s)$ (Kaczmarek, 1970)

$\begin{matrix} p (\%) \\ s \end{matrix}$	100	99	90	80	70	50	30	20	10	5	2	1	0,5	0,2	0,1	0,01
0,00	$-\infty$	-1,28	-1,00	-0,66	-0,41	0,00	0,41	0,66	1,00	1,23	1,60	1,82	2,01	2,25	2,41	2,90
0,10	-6,65	-1,20	-0,95	-0,63	-0,40	0,00	0,42	0,68	1,05	1,37	1,73	1,98	2,23	2,51	2,71	3,34
0,20	-3,31	-1,12	-0,90	-0,61	-0,39	0,00	0,42	0,70	1,10	1,45	1,87	2,16	2,43	2,78	3,03	3,82
0,30	-2,20	-1,04	-0,85	-0,59	-0,38	0,00	0,43	0,72	1,15	1,54	2,00	2,33	2,65	3,05	3,38	4,27
0,40	-1,64	-0,96	-0,80	-0,57	-0,37	0,00	0,44	0,74	1,20	1,62	2,11	2,51	2,87	3,34	3,70	4,77
0,50	-1,29	-0,89	-0,75	-0,54	-0,36	0,00	0,45	0,76	1,25	1,71	2,28	2,70	3,10	3,64	4,02	5,28
0,60	-1,06	-0,81	-0,70	-0,52	-0,35	0,00	0,45	0,78	1,30	1,79	2,42	2,88	3,33	3,93	4,37	5,81
0,70	-0,89	-0,74	-0,65	-0,49	-0,34	0,00	0,46	0,80	1,35	1,89	2,58	3,09	3,59	4,25	4,78	6,38
0,80	-0,76	-0,67	-0,60	-0,46	-0,32	0,00	0,46	0,81	1,40	1,98	2,73	3,30	3,86	4,59	5,16	6,98
0,90	-0,65	-0,60	-0,55	-0,43	-0,31	0,00	0,46	0,83	1,45	2,07	2,89	3,51	4,13	4,94	5,57	7,60
1,00	-0,57	-0,54	-0,50	-0,41	-0,30	0,00	0,47	0,84	1,50	2,16	3,05	3,72	4,39	5,29	5,98	8,92
1,10	-0,49	-0,48	-0,45	-0,38	-0,28	0,00	0,47	0,86	1,55	2,26	3,22	3,95	4,69	5,68	6,44	8,92
1,20	-0,42	-0,42	-0,40	-0,34	-0,26	0,00	0,47	0,87	1,60	2,37	3,40	4,21	5,02	6,10	6,93	9,70
1,30	-0,36	-0,36	-0,35	-0,31	-0,24	0,00	0,46	0,88	1,65	2,47	3,60	4,47	5,36	6,56	7,45	10,53
1,40	-0,31	-0,31	-0,30	-0,27	-0,21	0,00	0,46	0,89	1,70	2,58	3,80	4,76	5,74	7,05	8,06	11,45
1,50	-0,25	-0,25	-0,25	-0,23	-0,19	0,00	0,45	0,89	1,75	2,70	4,04	5,09	6,17	7,62	8,75	12,53
1,60	-0,20	-0,20	-0,20	-0,19	-0,16	0,00	0,43	0,88	1,80	2,83	4,31	5,48	6,68	8,31	9,58	13,81
1,70	-0,15	-0,15	-0,15	-0,14	-0,13	0,00	0,41	0,87	1,85	2,99	4,61	5,96	7,33	9,19	10,63	15,52
1,80	-0,10	-0,10	-0,10	-0,10	-0,09	0,00	0,37	0,84	1,90	3,18	5,08	6,62	8,23	10,42	12,11	17,94
1,90	-0,05	-0,05	-0,05	-0,05	-0,05	0,00	0,30	0,77	1,95	3,47	5,81	7,74	9,77	12,56	14,76	22,24
2,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,18	2,00	6,97	17,90	28,50	40,48	57,79	71,71	121,21

tyczną krzywą prawdopodobieństwa. Zgodność rozkładu empirycznego z przyjętym teoretycznym typem rozkładu można najprościej sprawdzić poprzez graficzne porównanie krzywej teoretycznej z krzywą empiryczną albo za pomocą testu zgodności Kołmogorowa, który zakłada, iż punkty empiryczne powinny układać się po obu stronach krzywej teoretycznej, oraz aby wartość bezwzględna największej różnicy pomiędzy prawdopodobieństwem empirycznym a teoretycznym spełniała warunek:

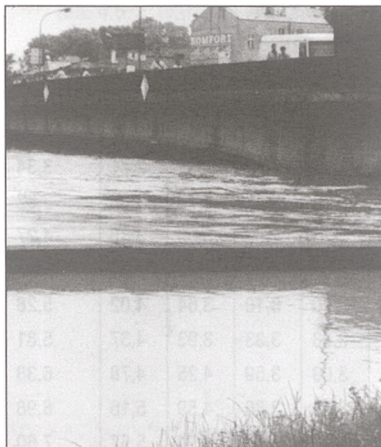
$$\max |p(m,N) - p| < \frac{136}{\sqrt{N}} \quad (4.6.4)$$

gdzie:

$p(m, N)$ – prawdopodobieństwo empiryczne m -tego wyrazu ciągu malejącego [%],

p – prawdopodobieństwo teoretyczne przewyższenia przepływu o wysokości takiej jak m -ty wyraz ciągu malejącego [%],

N – liczebność ciągu malejącego.



Zbyt niskie konstrukcje mostowe są wynikiem m.in. złego oszacowania natężenia przepływów ekstremalnych (zagrożone przęsło mostu na Wiśle podczas powodzi w lipcu 1997 r., Kraków)

przedział ufności – przedział, w obrębie którego, z określonym prawdopodobieństwem, znajduje się prawdziwa wartość parametru

Tab. 4.6.3. Wartości parametru t_α w zależności od poziomu ufności P_α (Kaczmarek, 1970)

P_α	0,95	0,90	0,84	0,50
t_α	1,65	1,28	1,00	0,00

Jeżeli ten warunek nie jest spełniony, należy zastosować inny typ rozkładu prawdopodobieństwa.

Badany N -letni ciąg przepływów maksymalnych jest próbą losową. Wskutek przypadkowości doboru wyrazów ciągu, wartości przepływów maksymalnych oszacowane na podstawie takiego ciągu różnią się od rzeczywistych wartości zmiennej w zbiorowości generalnej. Im krótszy jest okres, na podstawie którego określane są wartości zmiennej, oraz im mniejsze jest prawdopodobieństwo przewyższenia danego przepływu, tym większym błędem obarczony jest wynik obliczeń. Na podstawie metod statystyki matematycznej nie ma możliwości określenia rzeczywistej wartości zmiennej. Można natomiast określić średni losowy błąd oszacowania oraz granice przedziału, w którym rzeczywista wartość zmiennej jest zawarta z określonym prawdopodobieństwem. Przedział taki nosi nazwę normalnego przedziału ufności, zaś prawdopodobieństwo – poziomu ufności.

Średni losowy błąd oszacowania σ_{op} przepływów maksymalnych o określonym prawdopodobieństwie przekroczenia wynosi:

$$\sigma_{op} = F(s, p) \frac{c_v Q_{50}}{\sqrt{N}} \quad (4.6.5)$$

gdzie:

σ_{op} – średni losowy błąd oszacowania przepływów maksymalnych o określonym prawdopodobieństwie przewyższenia,

$F(s, p)$ – funkcja zależna od współczynnika asymetrii s i prawdopodobieństwa p (tab. 4.6.4),

c_v – współczynnik zmienności (patrz wzór 4.6.2),

Q_{50} – przepływ maksymalny roczny o prawdopodobieństwie przewyższenia 50% (mediana),

N – liczebność ciągu malejącego.

Prawdopodobieństwo P_α , że wartość Q_p znajdzie się w przedziale $Q_p - t_\alpha \sigma_{op} < Q_p < Q_p + t_\alpha \sigma_{op}$, nazywa się **poziomem ufności**. Wartości t_α zależne są od wymaganego poziomu ufności (tab. 4.6.3). Obliczenie dolnej i górnej granicy przedziału ufności pozwala na wyznaczenie obszaru pojawiania się rzeczywistych wartości prawdopodobnych przepływów maksymalnych.

Opisana wyżej metoda stosowana była przez wiele lat przez polską służbę hydrologiczną. Do wad tej metody należą:

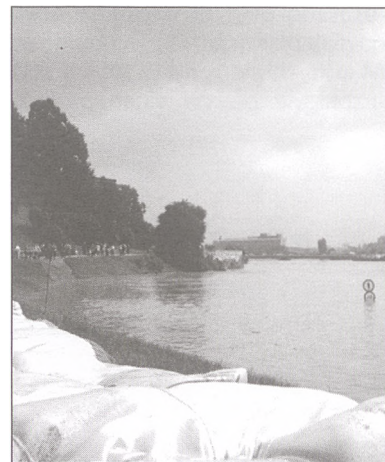
- subiektywność (odręcznie wyrównana krzywa empiryczna – subiektywne określenie decyli),
- zbyt duża „tolerancja” testu Kołmogorowa,
- brak konkretnych wskazówek odnośnie do możliwości zastosowania rozkładu różnego od rozkładu Pearsona III typu.

$\rho \backslash s$	50	10	5	1	0,1	0,01
0,0	0,978	1,334	1,909	3,735	6,848	10,233
0,1	0,978	1,478	2,119	4,080	7,390	10,981
0,2	0,978	1,622	2,329	4,426	7,933	11,730
0,3	0,978	1,767	2,543	4,794	8,529	12,366
0,4	0,978	1,912	2,758	5,162	9,126	13,402
0,5	0,978	2,056	2,970	5,531	9,725	14,243
0,6	0,978	2,200	3,183	5,900	10,324	15,084
0,7	0,978	2,340	3,402	6,292	10,976	16,008
0,8	0,978	2,489	3,621	6,684	11,629	16,933
0,9	0,978	2,633	3,835	7,066	12,260	17,818
1,0	0,978	2,777	4,052	7,449	12,892	18,704
1,1	0,978	2,921	4,268	7,832	13,520	19,583
1,2	0,978	3,066	4,484	8,215	14,148	20,463
1,3	0,978	3,210	4,699	8,598	14,775	21,339
1,4	0,978	3,335	4,915	8,981	15,403	22,215
1,5	0,978	3,499	5,130	9,361	16,022	23,080
1,6	0,978	3,643	5,345	9,741	16,642	23,945
1,7	0,978	3,788	5,561	10,122	17,264	24,809
1,8	0,978	3,903	5,777	10,504	17,887	25,674
1,9	0,978	4,077	5,992	10,883	18,505	26,533
2,0	0,978	4,221	6,207	11,263	19,123	27,393

Tab. 4.6.4. Wartości funkcji $F(s,p)$
(Kaczmarek, 1970)

Ostatnie lata przyniosły postęp zarówno w dziedzinie technik obliczeniowych, jak i metod statystycznych, a także pomiarowych. Cennymi opracowaniami w tym zakresie są *Hydrologia* (t. I, II; Byczkowski, 1996) oraz *Hydrologia stosowana* (Ozga-Zielińska, Brzeziński, 1997). Współcześnie preferuje się metody wykorzystujące maksymalnie informacje o własnościach pozastatystycznych ciągów w celu wyeliminowania ich niejednorodności genetycznej i statystycznej (patrz rozdz. 2.2) oraz informację o własnościach statystycznych badanych ciągów, w celu doboru najbardziej wiarygodnego rozkładu prawdopodobieństwa. Najnowsza procedura obliczeniowa stosowana przez służby hydrologiczne uwzględnia m.in. następujące założenia:

- teoretyczny rozkład prawdopodobieństwa wyznacza się osobno dla próby losowej największych przepływów roztopowych i próby losowej największych przepływów deszczowych, a następnie z tych rozkładów konstruuje się rozkład prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych rocznych,
- w procedurze wyboru rozkładu prawdopodobieństwa uwzględnia się cztery funkcje gęstości (rozkład gamma, log-normalny, Weibulla, log-gamma),



W czasie wzebrań katastrofalnych, wały przeciwpowodziowe umacniane są workami z piaskiem (Wisła pod Wawelem podczas powodzi w lipcu 1997 r.)

- estymacji parametrów rozkładów prawdopodobieństwa dokonuje się metodą największej wiarygodności,
- wyboru najbardziej wiarygodnej funkcji rozkładu prawdopodobieństwa dokonuje się wykorzystując kryterium informacyjne Akaike dla każdej z funkcji,
- zgodność rozkładu teoretycznego z rozkładem empirycznym weryfikuje się za pomocą testu zgodności χ^2 Pearsona,
- wyboru najlepiej dopasowanej funkcji spośród nieodrzuconych testem dokonuje się stosując kryterium minimalnej odległości Kołmogorowa $\min(D_{max})$,
- rozkład prawdopodobieństwa przewyższenia przepływów maksymalnych rocznych oblicza się jako prawdopodobieństwo alternatywy dwóch niewykluczających się (nierozłącznych) zdarzeń niezależnych.

4.6.2. Przepływy minimalne o określonym prawdopodobieństwie nieosiągnięcia

Ciągi obserwacyjne służące do obliczeń przepływów minimalnych o określonym prawdopodobieństwie nieosiągnięcia tworzy się w podobny sposób jak w przypadku przepływów maksymalnych, tzn. uwzględnia się przepływy minimalne z okresu rocznego lub półrocznego. Przy weryfikacji danych, należy zwrócić szczególną uwagę na zmiany punktu dennego (patrz rozdz. 4.2).

Rozkład prawdopodobieństwa przepływów minimalnych opisuje jeden z typów rozkładów opracowany dla wartości ekstremalnych, tj. rozkład **Fishera-Tippetta III typu**. Krzywa gęstości prawdopodobieństwa tego rozkładu jest asymetryczna, ograniczona od dołu w punkcie $x = \epsilon$, posiada jedno maksimum. Ten typ rozkładu znalazł zastosowanie w metodzie Gumbela, w której określa się prawdopodobieństwo nieosiągnięcia. Początkowo, parametry rozkładu szacowano metodą momentów. Metodę zmodyfikowano, i obecnie wyznacza się trzy parametry rozkładu wykorzystując tzw. funkcję testową oraz charakterystyki badanego ciągu. Pełny opis metody znajduje się m.in. w *Hydrologii*, t. I (Byczkowski, 1996).

Przykład

Wyznacz teoretyczną krzywą prawdopodobieństwa maksymalnych rocznych przepływów Czarnej Malenieckiej w profilu wodowskazowym Dąbrowa w obszarze prawdopodobieństwa od 0,1% do 100% oraz granice przedziału ufności na poziomie $P_\alpha = 0,90$ (tab. 4.6.5).

Tab. 4.6.5. Przepływy maksymalne roczne Czarnej Malenieckiej (Dąbrowa) i prawdopodobieństwo empiryczne (Zasady..., 1991)

Lp. (m)	Rok	Q_{\max} [m ³ ·s ⁻¹]	$p(m,N)$ [%]	Lp. (m)	Rok	Q_{\max} [m ³ ·s ⁻¹]	$p(m,N)$ [%]
1	1939	153	2,13	24	1979	54,5	51,06
2	1960	130	4,26	25	1957	52,2	53,19
3	1962	118	6,38	26	1949	50,4	55,32
4	1953	115	8,51	27	1943	47,8	57,45
5	1972	114	10,46	28	1955	46,1	59,57
6	1966	93,5	12,77	29	1964	45,5	61,70
7	1940	86,0	14,89	30	1965	44,4	63,83
8	1948	83,0	17,02	31	1952	44,0	65,96
9	1967	81,5	19,15	32	1954	44,0	68,08
10	1970	80,0	21,28	33	1934	43,6	70,21
11	1958	77,0	23,40	34	1932	39,8	72,34
12	1959	76,0	25,53	35	1975	39,8	74,47
13	1980	75,8	27,66	36	1961	37,3	76,60
14	1941	75,2	29,79	37	1963	35,9	78,72
15	1942	69,4	31,92	38	1956	35,7	80,85
16	1931	68,3	34,04	39	1976	35,5	82,98
17	1945	68,3	36,17	40	1946	33,8	85,11
18	1977	66,3	38,30	41	1969	33,5	87,23
19	1951	63,8	40,43	42	1950	32,7	89,36
20	1947	62,7	42,55	43	1978	32,3	91,49
21	1974	62,7	44,68	44	1930	32,2	93,62
22	1933	57,5	46,81	45	1971	29,2	95,74
23	1968	56,5	48,94	46	1973	15,9	97,87

Rozwiązanie

1. Sprawdzenie jednorodności statystycznej ciągu

Na podstawie testu sumy rang Kruskala-Wallisa (por. rozdz. 2.2) stwierdzono, że ciąg przepływów maksymalnych rocznych Czarnej Malenieckiej w Dąbrowie (Wzgórza Opoczyńskie) jest statystycznie jednorodny na poziomie istotności 0,05.

2. Uporządkowanie wartości maksymalnych rocznych przepływów Q_{\max} w ciąg malejący oraz przyporządkowanie każdemu wyrazowi ciągu wartości prawdopodobieństwa empirycznego obliczonego według wzoru (4.6.1) i zestawienie w tab. 4.6.5

Przykład obliczenia prawdopodobieństwa p w odniesieniu do dwudziestego elementu ciągu o liczebności $N = 46$:

$$p = \frac{20}{46 + 1} \cdot 100 = 42,55 \text{ [%]}$$

Oznacza to, że prawdopodobieństwo przewyższenia przepływu $62,7 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ (dwudziesty element ciągu) wynosi 42,55%.

3. Naniesienie na podziałkę prawdopodobieństwa dla rozkładu Pearsona III typu poszczególnych wartości ciągu Q_{\max} i odpowiadających im prawdopodobieństw empirycznych $p(m,N)$ oraz odrębne wyrównanie krzywą wygładzającą (ryc. 4.6.3)

4. Odczytanie z krzywej empirycznej wartości decyli

Z krzywej wykreślonej według opisu w punkcie 3 należy odczytać wartości Q_{10} , Q_{50} , Q_{90} i Q_{100} :

$$Q_{10} = 108 \text{ [m}^3 \cdot \text{s}^{-1}\text{]}$$

$$Q_{50} = 56,0 \text{ [m}^3 \cdot \text{s}^{-1}\text{]}$$

$$Q_{90} = 28,0 \text{ [m}^3 \cdot \text{s}^{-1}\text{]}$$

$$Q_{100} = 14,0 \text{ [m}^3 \cdot \text{s}^{-1}\text{]}$$

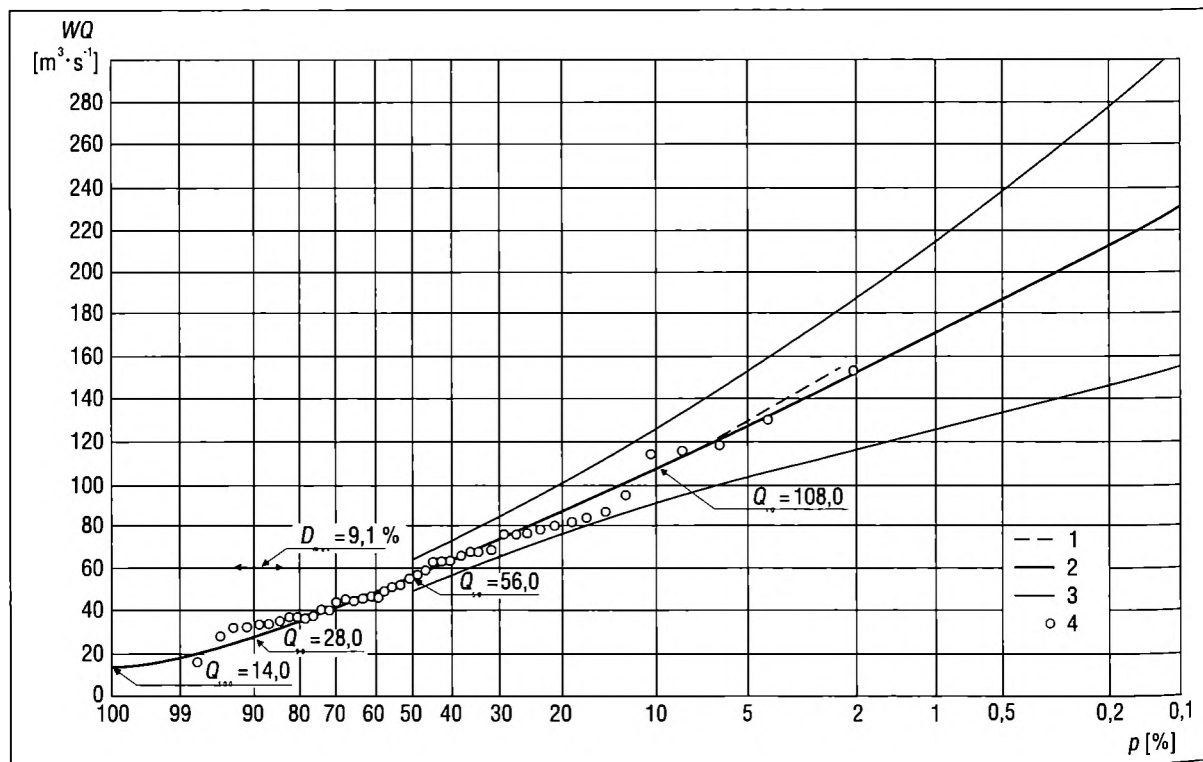
5. Obliczenie współczynnika zmienności c_v

Aby obliczyć współczynnik zmienności, należy skorzystać ze wzoru (4.6.2):

$$c_v = \frac{108 - 28,0}{2 \cdot 56,0} = 0,714$$

6. Wyznaczenie współczynnika asymetrii s

Wielkość współczynnika asymetrii s odczytuje się z tab. 4.6.1 po uprzednim obliczeniu wyrażenia



Ryc. 4.6.3. Krzywe prawdopodobieństwa maksymalnych rocznych przepływów Czarnej Małenickiej (Dąbrowa)

1 – krzywa wyrównana odręcznie; 2 – teoretyczna krzywa prawdopodobieństwa; 3 – granice przedziału ufności; 4 – punkty o współrzędnych Q_{maks} i $p(m, N)$

P [%]	$\phi(p, s)$	$c_v \phi(p, s)$	$1 + c_v \phi(p, s)$	Q_p
0,1	4,37	3,120	4,120	231
0,2	3,93	2,806	3,806	213
0,5	3,33	2,378	3,378	189
1	2,88	2,056	3,056	171
2	2,42	1,728	2,728	153
3	2,13	1,521	2,521	141
5	1,79	1,278	2,278	127
10	1,30	0,928	1,928	108
20	0,78	0,557	1,557	87,2
30	0,45	0,321	1,321	74,0
50	0,00	0,000	1,000	56,0
70	-0,35	-0,250	0,750	42,0
80	-0,52	-0,371	0,629	35,2
90	-0,70	-0,500	0,500	28,0
95	-0,81	-0,578	0,422	23,6
99	-0,95	-0,678	0,322	18,0
100	-1,06	-0,757	0,243	13,6

Tab. 4.6.6. Zestawienie funkcji i wyrażeń koniecznych do obliczenia przepływów maksymalnych Czarnej Małenickiej (Dąbrowa) o określonym prawdopodobieństwie przekroczenia (Zasady ..., 1991)

Tab. 4.6.7. Granice przedziałów ufności krzywej rozkładu teoretycznego przepływów maksymalnych Czarnej Małenickiej (Dąbrowa) (Zasady ..., 1991)

p [%]	Q_p [$m^3 \cdot s^{-1}$]	σ_{Qp} [$m^3 \cdot s^{-1}$]	$t_{\alpha} \sigma_{Qp}$ [$m^3 \cdot s^{-1}$]	Dolna i górna granica przedziału ufności	
				$Q_p - t_{\alpha} \sigma_{Qp}$ [$m^3 \cdot s^{-1}$]	$Q_p + t_{\alpha} \sigma_{Qp}$ [$m^3 \cdot s^{-1}$]
0,1	231	60,9	78,1	153	309
1	171	34,8	44,6	126	216
5	128	18,8	24,1	104	152
10	108	13,0	16,7	91,3	125
50	56,0	5,77	7,40	48,6	63,4

$$\frac{v}{Q_{50} - Q_{100}} = \frac{40}{56 - 14} = 0,95$$

Współczynnik asymetrii s dla $v = 0,95$ wynosi 0,60.

7. Obliczenie przepływów maksymalnych o określonym prawdopodobieństwie pojawiania się

Wartości przepływów maksymalnych o określonym prawdopodobieństwie pojawiania się oblicza się według wzoru (4.6.3) i zestawia w tabeli (tab. 4.6.6). Przykład obliczenia przepływu o prawdopodobieństwie pojawiania się 5%:

$$Q_s = Q_{50} [1 + c_v \varphi(p, s)] = 56 [1 + 0,714 \varphi(p, s)]$$

Wartość funkcji $\varphi(p, s)$ odczytuje się z tab. 4.6.2: dla współczynnika asymetrii $s = 0,60$ i prawdopodobieństwa $p = 5\%$, wartość $\varphi(p, s)$ wynosi 1,79, czyli:

$$Q_s = 56 (1 + 0,714 \cdot 1,79) = 56 (1 + 1,27) = 127,12 \text{ [m}^3 \text{ s}^{-1}\text{]}$$

8. Wykreślenie teoretycznej krzywej prawdopodobieństwa

W układ współrzędnych, gdzie uprzednio naniesiono wyrazy ciągu rozdzielczego, należy nanieść wartości obliczone w punkcie 7 (tab. 4.6.6) i wykreślić teoretyczną krzywą prawdopodobieństwa maksymalnych rocznych przepływów Q_p .

9. Sprawdzenie zgodności krzywej empirycznej z przyjętym typem rozkładu

Należy określić bezwzględną wartość największej różnicy D_{max} pomiędzy prawdopodobieństwem empirycznym a teoretycznym (rys. 4.6.3). Różnica ta wynosi:

$$D_{max} [p(m, N) - p] = 93,6 - 84,5 = 9,1 \text{ [%]}$$

i spełnia nierówność (4.6.4), bowiem jest mniejsza od wartości $\frac{136}{\sqrt{46}} \approx 20 \text{ [%]}$

Warunek określony testem zgodności Kolmogorowa jest zatem spełniony, czyli nie ma podstaw do odrzucenia przyjętego rozkładu prawdopodobieństwa Pearsona III typu.

10. Określenie granic przedziału ufności na poziomie $P_\alpha = 0,90$

Aby określić granice przedziału ufności, należy wcześniej obliczyć średni błąd oszacowania wartości Q_p według wzoru (4.6.5) i wyniki zestawzić w tabeli (tab. 4.6.7). Przykład obliczenia średniego błędu oszacowania przepływu σ_{Qs} :

$$\sigma_s = 3,183 \cdot \frac{0,714 \cdot 56,0}{\sqrt{46}} = 18,77$$

Aby wyznaczyć dolną i górną granicę przedziału ufności, należy odczytać wartość t_α z tab. 4.6.4 na poziomie ufności $P_\alpha = 0,90$. Wynosi ona 1,28. Wartość wyrażenia w kolejnej kolumnie $t_\alpha \sigma_{Qp}$ dla Q_s wynosi więc $1,28 \cdot 18,8 = 24,1$. Dolna granica przedziału ufności jest różnicą: $128 - 24,1 = 103,9$, natomiast górna granica – sumą: $128 + 24,1 = 152,1$. Dolne i górne granice przedziałów ufności należy nanieść w układ współrzędnych i połączyć (ryc. 4.6.3).

Odpowiedź

Teoretyczną krzywą prawdopodobieństwa maksymalnych rocznych przepływów w obszarze prawdopodobieństwa od 0,1% do 100% oraz granice przedziału ufności na poziomie $P_\alpha = 0,90$ Czarnej Malenieckiej w przekroju wodowskazowym Dąbrowa przedstawia ryc. 4.6.3.

Zadanie

Jaka jest wielkość przepływów maksymalnych Czarnej Malenieckiej, które mogą wystąpić raz na 5 lat (ryc. 4.6.3)?